Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

Arătaţi că , pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile:

$$2n < \frac{8}{3} + \frac{13}{5} + \frac{18}{7} + \cdots + \frac{5n+3}{2n+1} < 3n\ .$$

Subiectul 2.

Fie a,b,c,d numere raționale nenule. Arătaţi că ecuația

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)x + c + d\sqrt{2} = 0$$

are o rădăcină rațională dacă și numai dacă $ad = bc$.

Subiectul 3.

Fie triunghiul isoscel ABC , cu $[AB] \equiv [BC]$. Fie $M \in BC$ astfel încât $[AM] \equiv [AC]$ și $N \in AB$ astfel încât $[MN] \equiv [AC]$. Știind că $m(\measuredangle NMB) = 30^0$, aflaţi unghiurile triunghiului ABC.

Subiectul 4.

Pe diagonala mare (AC) a rombului $ABCD$ de centru O, se iau punctele $M \in (AO)$, respectiv $N \in (OC)$ astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Demonstraţi că ΔBMN este echilateral dacă și numai dacă $[DB] \equiv [AB]$.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019
BAREM DE CORECTARE CLASA A VII-A

Subiectul 1.

Arătați că , pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile:

$$2n < \frac{8}{3} + \frac{13}{5} + \frac{18}{7} + \cdots + \frac{5n+3}{2n+1} < 3n \ .$$

Soluție:

$5k + 3 = 2(2k + 1) + k + 1$ ……………………………………………………………**1p**

$\frac{5k+3}{2k+1} = 2 + \frac{k+1}{2k+1}$ ………………………………………………………..………………**1p**

$0 < \frac{k+1}{2k+1} < 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$…………………………………………………...……………**1p**

$2 < \frac{5k+3}{2k+1} < 3, \forall\ k = \overline{1,n}$ ……………………………………………………..……………**2p**

Prin însumare obținem

$2n < \frac{8}{3} + \frac{13}{5} + \frac{18}{7} + \cdots + \frac{5n+3}{2n+1} < 3n$ …………………………………………...…...….**2p**

Subiectul 2.

Fie a,b,c,d numere raționale nenule. Arătaţi că ecuația

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)x + c + d\sqrt{2} = 0$$

are o rădăcină rațională dacă și numai dacă $ad = bc$.

Soluție: $" \Rightarrow "$ Fie x_0 o rădăcină rațională a ecuației date

$\left(a + b\sqrt{2}\right)x_0 + c + d\sqrt{2} = 0$ **1p**

$ax_0 + c + \sqrt{2}(bx_0 + d) = 0$ **1p**

$ax_0 + c = 0$ și $bx_0 + d = 0$ **1p**

$-\frac{c}{a} = -\frac{d}{b} \Leftrightarrow ad = bc$ **1p**

$" \Leftarrow "\ ad = bc \Rightarrow d = \frac{bc}{a}$

Ecuația devine $\left(a + b\sqrt{2}\right)x + c + \frac{bc}{a}\sqrt{2} = 0$ **1p**

$a\left(a + b\sqrt{2}\right)x + c\left(a + b\sqrt{2}\right) = 0$

$\left(a + b\sqrt{2}\right)(ax + c) = 0$ ………………………………………………………………..**1p**

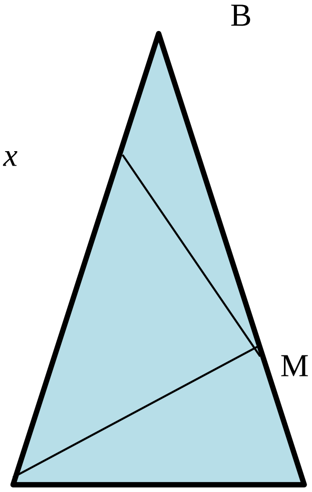
Cum $a + b\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$ ……………………………………………………**1p**

Subiectul 3.

Fie triunghiul isoscel *ABC* , cu [*AB*]≡[*BC*]. Fie *M*∈*BC* astfel încât [*AM*]≡[*AC*] și *N*∈*AB* astfel încât [*MN*]≡[*AC*]. Știind că $m(\measuredangle NMB) = 30^0$, aflaţi unghiurile triunghiului *ABC*.

Soluție:

Cazul I M∈ (BC) , N∈ (AB)



ΔABC isoscel : $m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle BCA) = x$

$\Rightarrow m(\measuredangle ABC) = 180^0 - 2x$

$(AM)\equiv(AC) \Rightarrow \Delta AMC$ isoscel : $m(\measuredangle AMC) = m(\measuredangle ACM) = x$

$\Rightarrow m(\measuredangle MAC) = 180^0 - 2x$

$m(\measuredangle BAM) = m(\measuredangle BAC) - m(\measuredangle MAC)$

$m(\measuredangle BAM) = x - (180^0 - 2x) = 3x - 180^0$ (1)

Deoarece $(MN)\equiv(AC)$și $(AC)\equiv(AM)\Rightarrow(MN)\equiv(AM)$

$\Rightarrow \Delta$ AMN isoscel **1p**

Deci $m(\measuredangle MNA) = m(\measuredangle MAN) = 3x - 180^0$ (2)

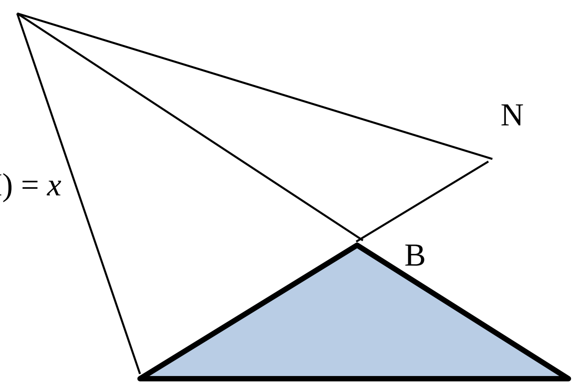
Dar $\measuredangle MNA$ – exterior Δ MNB

$\Rightarrow m(\measuredangle MNA) = m(\measuredangle NBM) + m(\measuredangle NMB)$

Din relațiile (1) și (2) rezultă : $3x - 180^0 = 180^0 - 2x + 30^0 \Leftrightarrow 5x = 390^0 \Leftrightarrow x = 78^0$

Deci $m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle BCA) = 78^0$ și $m(\measuredangle ABC)= 180^0 - 2\cdot 78^0= 24^0$............................ **2p**

Cazul II M∈ (CB , N∈ (AB



Δ ABC isoscel : $m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle BCA) = x$

$\Rightarrow m(\measuredangle ABC) = 180^0 - 2x$

Δ MAC isoscel $\Rightarrow(MA)\equiv(AC)$, $m(\measuredangle AMC) = m(\measuredangle ACM) = x$

$\Rightarrow m(\measuredangle MAC) = 180^0 - 2x$

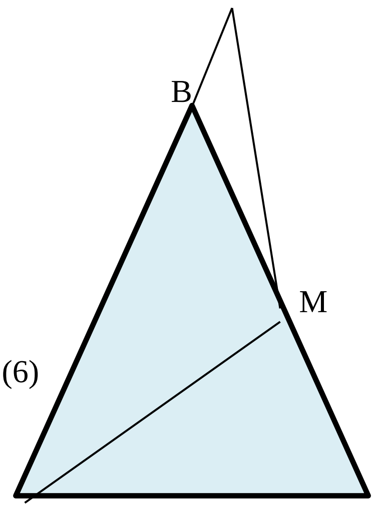
$m(\measuredangle MAB) = m(\measuredangle MAC) - m(\measuredangle BAC)= 180^0 - 3x$

Δ MAN isoscel :$(AM)\equiv(MN)\Rightarrow$

m(∡MAN) = m(∡MNA) =$180^0 - 3x$⇒m(∡AMN) = 180^0 - 2·m(∡MAN) = $180^0 - 3\cdot(180^0 - 3x) = 6x - 180^0$ (3)
m(∡AMN) = m(∡AMB) + m(∡BMN) = $x + 30^0$(4)
Din relațiile (3) și (4) rezultă: $6x - 180^0 = x + 30^0$ ⇔$5x = 210^0$ ⇔$x = 42^0$

Deci m(∡BAC) = m(∡BCA) = 42^0 și m(∡ABC)= 96^0... **2p**

Cazul III M∈ (BC) , N∈ (AB



m(∡BAC) = m(∡BCA) = m(∡AMC) = x
⇒m(∡MAC) = $180^0 - 2x$

m(∡BAM) = m(∡BAC) - m(∡MAC)= $x - (180^0 - 2x) = 3x - 180^0$

Δ AMN isoscel ⇒m(∡MAN) = m(∡MNA) = $3x - 180^0$

m(∡AMN) = $180^0 - 2\cdot(3x - 180^0) = 180^0 - 6x + 360^0 = 540^0 - 6x$(5)

Dar m(∡AMN) = m(∡AMB) + m(∡BMN) = $180^0 - x + 30^0 = 210^0 - x$ (6)

Din relațiile (5) și (6) rezultă: $540^0 - 6x = 210^0 - x$ ⇔$5x = 330^0$ ⇔

$x = 66^0$

Deci m(∡BAC) = m(∡BCA) = 66^0 și m(∡ABC)= 48^0.................. **2p**

Subiectul 4.

Pe diagonala mare (AC) a rombului *ABCD* de centru *O*, se iau punctele $M \in (AO)$, respectiv $N \in (OC)$ astfel încât $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Demonstraţi că ΔBMN este echilateral dacă și numai dacă $[DB] \equiv [AB]$.

Soluție:
" ⇒ " ΔBMN echilateral , $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC] \Rightarrow$
$[AM] \equiv [MN] \equiv [NC] \equiv [BM] \equiv [BN]$ **1p**
ΔAMB isoscel cu $m(\measuredangle AMB) = 120^0$ **1p**
$\Rightarrow m(\measuredangle BAC) = 30^0$, *ABCD* romb $\Rightarrow m(\measuredangle BAD) = 60^0$, $[AD] \equiv [AB] \Rightarrow [DB] \equiv [AB]$.....**1p**
" ⇐ " $[DB] \equiv [AB]$, *ABCD* romb ⇒ ΔABD este echilateral **1p**
$\Delta ABM \equiv \Delta CBN \Rightarrow [BM] \equiv [BN]$ **1p**
ΔBMN isoscel, $BO \perp MN \Rightarrow MO = ON = \frac{MN}{2}$, $[AM] \equiv [MN] \Rightarrow AM = 2MO$...................**1p**
Dar *AO* este mediană în ΔABD echilateral ⇒ M este centrul de greutate al ΔABD echilateral ⇒ M este centrul cercului circumscris al $\Delta ABD \Rightarrow [AM] \equiv [BM]$
Cum $[AM] \equiv [MN]$ și $[BM] \equiv [BN] \Rightarrow \Delta BMN$ este echilateral **1p**